

Matematika podle profesora Hejného

Kateřina Novotná

V naší škole ZŠ Kunratice učíme matematiku na prvním stupni podle učebnic nakladatelství Fraus. Autorem této koncepce je pan profesor Milan Hejný, který říká, že již jeho tatínek se tomuto způsobu výuky matematiky věnoval a on na to jen navázal a že takto se svými žáky napříč všemi ročníky pracoval již od sedmdesátých let. Nejde tedy o náhlý či nahodilý nápad, ale o dopředu promyšlený a mnoha experimenty s mnoha žáky podložený plán výuky matematiky reprezentovaný řadou učebnic Fraus prozatím pro 1. až 5. ročník.

Tato koncepce radikálně mění představu mnohých z nás, že matematiku se musíme učit především z paměti – násobilku, vzorečky pro výpočet obsahů, obvodů, objemů i způsob, jak vypočítat rovnice s neznámou... Nikdo po nás vlastně nikdy nechtěl, abychom matematice porozuměli, a možná nás ani nenapadlo, že bychom mohli, možná nám připadalo, že to ani nejde...

Tato koncepce **respektuje uznávanou teorii poznávacího procesu** – teorii generického modelu. Dle ní je na počátku poznávání něco, co nevíme, čemu nerozumíme, ale vědět to a porozumět tomu chceme (máme pro proces poznávání motivaci). Následným vlastním zkoumáním a experimentováním získáváme nejprve prvotní zkušenosti (tzv. izolované modely) a postupně dojde ke klíčovému okamžiku celého procesu – objevíme určitý model (generický model), který platí pro všechny předešlé situace, kterými jsme se zabývali – objevíme nástroj, který nám pomůže vyřešit i všechny následující podobné úlohy. A díky tomu, že jsme si sami prošli cestu od jednotlivých zkušeností až k tomuto „objevu“ je poznání pro nás trvalé – nikdo nás nemusí nutit učit se ho z paměti. Dokážeme dokonce popsat jednotlivé fáze naší cesty poznávání tohoto jevu od začátku až do konce – čím jsme začali, co se nám nedařilo, co jsme tedy zkusili jinak, na co jsme poté přišli, kam nás to posunulo, co jsme zjistili, že platí, co naopak neplatí... Všechny takto získané poznatky budují v naší hlavě schémata, která se dalším získáváním zkušeností přirozeně dotvářejí, obohacují o nové poznatky a propojují se navzájem, aniž bychom si museli stokrát z paměti opakovat, že to tak je. To, co si zažijeme, co sami musíme zkoumat, poznávat, trápit se s tím, abychom tomu přišli na kloub, už nám nikdo nemusí vysvětlovat a učit nás to. Do naší paměti se to uloží postupně a přirozeně, my se k tomu můžeme kdykoli vrátit a napojit na to zkušenosti nové. Koncepce matematiky pana profesora Hejného je založena především na činnostním učení, které respektuje přirozený proces poznávání.

Matematické učebnice Fraus nabízejí hlavně učení zážitkové, učení prostřednictvím vlastní zkušenosti, pomocí pohybu a vlastní manipulace s různými pomůckami. (Děti například pomocí metody pokus–omyl postupně zjišťují, jak si řešení daného typu úloh usnadnit, samy přicházejí na různé řešitelské strategie, pak na první matematická pravidla, a tím vším si pevně budují svá schémata.)

Druhou zásadou je, že ani jako učitel, ani jako rodič nemohu tento proces poznávání urychlit tím, že dítěti prozradím řešení. Tím bych ho naopak o postupné sbírání zkušeností a budování schématu okradl. Každému z nás poznávání jedné věci může trvat různě dlouho – to je přece také přirozené. Pokud tedy některý žák zažívá při svém bádání „krizi“ či opakovaný neúspěch, když se mu prostě nedaří najít řešení, mohu mu pomáhat několika způsoby. Především chytrými otázkami – takovými, které žáka donutí zamyslet se (třeba nad částí úlohy) tak, aby na řešení opravdu přišel sám. Pro každého z nás je taková „chytrá otázka“ samozřejmě jiná, podle našich aktuálních zkušeností či dovedností.

Dále musím každého zoufajícího žáka podpořit důvěrou v jeho schopnosti, dát mu najevo, že věřím, že to zvládne, povzbuzovat ho na jeho badatelské cestě a na konci ho zahrnout zaslouženým obdivem. Ale nesmím ho nutit přijmout můj pohled, řešení, způsoby. Protože je neobjevil sám, nebyly by součástí jeho schématu, jeho představy o daném problému. A navíc bych ho vytrhla z jeho vlastní přirozené cesty za poznáním a postavila ho do cíle, aniž by sám věděl, jak se tam ocitl.

Učitel má mnoho možností, kdy může zdatnějším žákům, kteří právě postupují po své cestě rychleji a kteří již získali do daných úloh vhled, připravit úlohy s vyšší náročností, které jim pootevřou cestu k poznání dalšímu. A pro žáky, kteří zrovna postupují pomaleji, může naopak přichystat úlohy jednodušší, aby je na jejich cestě podpořil.

Všichni žáci musejí mít stále k dispozici dostatek pomůcek. Především zpočátku, kdy řeší úlohy pouze nebo převážně manipulací, je to naprosto nezbytné. I později, když už získají s řešením úloh zkušenosti a objeví vlastní způsoby, jak je řešit, by měli mít stále všichni k pomůckám přístup. Ti, co postupují pomaleji nebo se právě s nějakou úlohou trápí, mohou díky pomůckám na její řešení přijít. Ti, co postupují rychleji, mohou pomůcky využít při setkání s náročnou nebo novou úlohou.

Diskuse mezi žáky o nalezeném řešení a použité strategii je také velmi cennou pomocí na cestě k poznání daného problému. Během ní si žáci vzájemně ujasňují názory a odhalují vlastní chybné nebo nepřesné představy a jejich příčiny. Když si žáci mezi sebou při společné diskusi sdělují, na co přišli, a pro ně srozumitelným jazykem si třeba i něco vzájemně odhalí (seznájí ostatní se svým postupem řešení, s tím, čeho si všiml, co objevil), je to lepší, než když předstoupí učitel a řekne: „Tak, děti, je to takhle...“ a z pozice autority jim dané pravidlo či řešení „naservíruje“.

Učitel je při „frausovské“ matematice pouze jakýmsi pomocníkem, tím, kdo představuje úlohy, iniciuje, nabízí, pokládá otázky, organizuje, moderuje diskusi, sumarizuje ji, je možná rádcem a pomocníkem pro žáky slabší, ale veškerá aktivita je na žácích samotných. Chybu učitel nezdůrazňuje, ale nabídne takovou úlohu, při jejímž řešení ji žáci sami odhalí a opraví. Chyba není nic, za co bychom se měli stydět, je vnímána jako to, co nám pomůže se posunout, jako krok kupředu na cestě k řešení – je nezbytnou součástí řešitelského procesu.

Co jsou to **matematická prostředí**, která jsou náplní učebnic Fraus?

Celá náplň matematiky pro 1. stupeň je, řekněme, takový dům a ten je přehledně rozdělen na mnoho místností – na matematická prostředí – aritmetická či geometrická. Každé má svá specifika, svá pravidla. Během hodin matematiky se s nimi děti postupně a pozvolna seznamují a přirozeně, pomocí činnostního učení (a často opravdu díky vlastnímu pohybu např. krokováním na číselné ose) do nich pronikají. Je tu kupř. prostředí Krokování, Biland, Zvířátka dědy Lesoně, Pavučiny a mnohá další, ve kterých žáci jednak pracují na své dovednosti čísla sčítat, odčítat atd., jednak s sebou každé z těchto prostředí přináší možnost setkat se s dalšími matematickými jevy, které žáci budou muset řešit na druhém stupni ZŠ. Seznamují se s nimi ve zjednodušené a pro žáky prvního stupně přijatelné (často pohádkové či hravé) formě. Třeba prostředí Krokování je propedeutikou na práci s číselnou osou, se zápornými čísly, s rovnicemi... Biland je pohádkové seznamování se s dvojkovou soustavou pomocí pohádkových grošů různých hodnot. Kromě toho, že každé z matematických prostředí rozvíjí intelekt každého žáka a promyšleně a přirozeně prostřednictvím vlastních zkušeností s řešením úloh žáky seznamuje s jevy, kterým se později nebudou muset učit z paměti, ale budou mít možnost jim porozumět, přináší s sebou tato matematika obrovský prostor pro rozvoj mnoha dalších dovedností jako: hledat více řešení jedné úlohy (rozvoj divergentního myšlení), hledat i různé strategie (způsoby či možnosti) řešení vedoucí k jednomu cíli, diskutovat o těchto řešeních se spolužáky, argumentovat pro i proti, nacházet důkazy těchto argumentů, obhajovat vlastní názor, zaznamenávat si pečlivě nalezené údaje a díky tomu v nich třeba objevovat pravidelnosti, které nám mohou odhalit jistá „vyšší“ matematická pravidla.

Naším cílem je, aby dítě danému matematickému problému opravdu rozumělo, mělo do něj vhléd, dokázalo řešit i zapeklité úlohy a hledalo různá řešení. Tato cesta je pomalá, protože opravdu něco poznat zabere čas. Přesto já osobně volím pro své žáky tuto cestu, protože podle mého názoru a získaných zkušeností vede k mnohem bohatšímu a trvalejšímu cíli.

Seznámení s matematickým prostředím aneb Zvířátka dědy Lesoně

Děti se s tímto prostředím seznamují například pomocí maňáska „kouzelného“ dědečka a vypravováním: „Bylo, nebylo, v jedné pohádkové zemi na kraji lesa bydlí dědeček Lesoně a s ním v jeho chaloupce a na jeho statku žije i mnoho zvířátek. Děda Lesoně se o ně stará, krmí je... a kromě toho pro ně připravuje různé hry a soutěže, aby se nenudila. Zvířátka mají nejraději ze všeho hru na přetahovanou. Ale zvířecí družstva musejí být stejně silná, aby byla hra fér, aby měla obě možnost zvítězit. Takže tu máme nejprve myšky. Myška samotná je nejslabší ze všech zvířátek, a když se chce hrát sama s někým na přetahovanou, kdo jedině může být jejím soupeřem, co myslíte? (Jedině jiná myška.) Pak tu máme kočičku. Kočička je silnější než jedna myška. Jedna kočka je ale právě tak silná, jako jsou silné dvě myšky dohromady.“

Vypravování můžeme prokládat ilustracemi a prvními úlohami.

Poznámka: Vpravo je ikonický zápis.

Zadání: Které družstvo je silnější? Jak to víš? Může kočičce přijít někdo na pomoc?

Pro nás dospělé (ať už učitele, či rodiče, ale jen pro nás) je nejdůležitější vědět, že v prostředí zvířátek, je číslo ve funkci veličiny (nikoli počtu, jako je tomu v ostatních prostředích). Každé zvířátko představuje určitou sílu a děti se postupně seznámí s dalšími zvířátky – vždy silnějšími, než jsou ta předchozí. S tím, jak přibývají zvířátka, přibývají i možnosti, jak úlohy sestavit a udělat je zajímavějšími.

Postupně přibude i koza, která má sílu jako pět myšek a beran, který má sílu jako šest myší. Ve vyšších ročnících i další zvířátka jako kráva, kůň, lev a slon.

Jednotlivé rozložení sil je pevně dané a děti s jeho přijetím většinou nemívají problém. Všechny myšky v běžném životě a našem světě nemají stejnou sílu, ale v pohádkovém světě u dědy Lesoně ano. Stejně tak každá kočka má sílu jako dvě myši atd.

Děti mohou družstva zvířátek porovnávat, doplňovat slabší družstvo tak, aby se síly vyrovnaly, rozdělovat skupinu zvířátek do dvou či více stejně silných skupin atd. Různé typy úloh jsou různě obtížné a k jejich řešení je třeba užít různých strategií, které necháme děti postupně objevovat.

Zadání: Doplň =, <, >.

Zadání: Doplň jedno zvířátko k slabšímu družstvu, aby byla družstva stejně silná.

Zadání: Rozděl na tři stejně silná družstva.

Náročnost úloh stoupá spolu s přibývajícím počtem jednotlivých zvířat (mám více koček a myší) i s přibývajícím počtem druhů zvířat (mám myši, kočky, husy a psy).

Ještě náročnější variantou je situace, kdy jsou některá ze zvířat krytá maskami – známe jejich počet, ale neznáme jejich sílu/hodnotu. Tuto situaci navozujeme povídáním o karnevalu či masopustním reji.

Zadání: O masopustu uspořádal děda Lesoň pro svá zvířátka maškarní rej. Potom se opět přetahovala. Některá zvířátka měla masku. Zjisti, které zvířátko se ukrývá za maskou. Za stejnými maskami jsou též zvířátka.

Bavíme se s dětmi o různých strategiích jejich řešení, srovnáváme je a hledáme ty nejúčinnější. Rozhodně jim nevnucujeme své strategie, můžeme pouze nabízet a hlavně pracovat s pomůckami – kartičkami s ikonami zvířátek.

Toto prostředí rozvíjí konceptuální vnímání dětí. Je propedeutikou pro počítání rovnic s písmeny, s neznámou – s takovými rovnicemi se děti setkávají ve čtvrtém ročníku.

Autorka je učitelka 1. stupně ZŠ v Praze-Kunraticích.

Foto: z archivu ZŠ Kunratice.

Autorka článku s profesorem Hejným při krokování.

Prezentace výuky pro rodiče.

Výuka matematiky ve třídě.

Žák počítá na tabuli.

Samostatná práce.

Individuální podpora ze strany učitele.